קלאסית 1 – תרגול 3

חוקי ניוטון ודינמיקה

חוקי התנועה של ניוטון

- **<u>חוק 1 - התמדה</u>**

בהעדר כוחות או כאשר שקול הכוחות על הגוף מתאפס, הגוף יתמיד במהירות קבועה או ימצא במנוחה.

- **<u>חוק 2 - דינמיקה</u>**

$$\sum_i \vec{F}_i = m\vec{a}$$

- **<u>חוק 3 – פעולה ותגובה</u>**

אם גוף 1 מפעיל כח על גוף 2 ($\vec{F}_{1,2}$) אז גוף 2 מפעיל כח תגובה באותו גודל עם סימן הפוך כך שמתקיים

$$\vec{F}_{1,2} = -\vec{F}_{2,1}$$

חוקי התנועה של ניוטון

- **<u>סטטיקה</u>**

תנאי הכרחי לשיווי משקל הוא שהסכום הווקטורי של הכוחות שפועלים על הגוף – מתאפס.

$$\sum_i \vec{F}_i = 0$$

- **<u>שלבים בפתרון בעיות</u>**

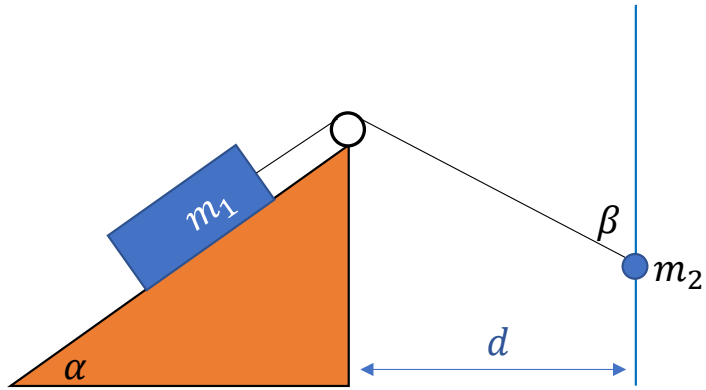
1. נקבע מערכת צירים שמתאימה לבעיה.
2. נשרטט את הכוחות ונוודא שהביטויים מתאימים למערכת הצירים שבחרנו.
3. נרשום את משוואת הכוחות של כל גוף בבעיה, לכל ציר בנפרד - כלומר משוואה אחת לכל גוף בכל קואורדינטה.
4. נרשום אילוצים קינמטיים – למשל שימור אורך החוט.
5. נפתור את משוואת הכוחות.

דינמיקה

- **<u>תרגיל 1</u>**

גוף שמסתו m_1 מונח על מדרון עם זווית α. הגוף מחובר לחרוז בעל מסה m_2 באמצעות חבל חסר מסה דרך גלגלת אידאלית.

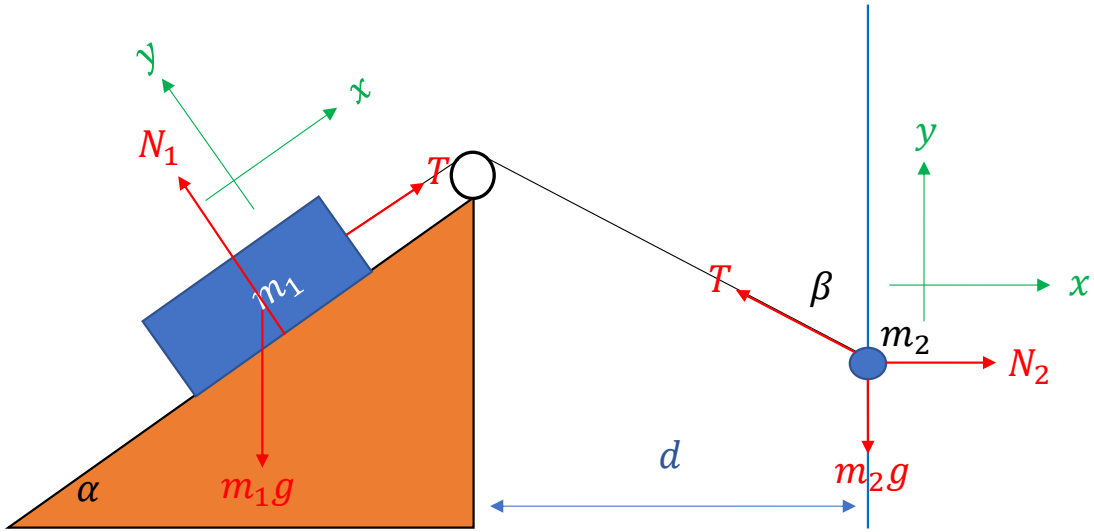
החרוז חופשי לנוע על תיל אנכי במרחק אופקי d מקצה המישור. המערכת נמצאת בשיווי משקל. מצאו את הזווית β



דינמיקה

• תרגיל 2 - פתרון

1. נבחר מערכות צירים
2. נשרטט את הכוחות
3. נכתוב את משוואות הכוחות של כל גוף בכל ציר



$$N_2 - T\sin\beta = m_2 a_{2,x} = 0$$

$$T\cos\beta - m_2 g = 0$$

$$N_1 - m_1 g\cos\alpha = 0$$

$$T - m_1 g\sin\alpha = 0$$

מכאן יש לנו מספיק מידע כדי לענות על השאלה –

$$T = m_1 g\sin\alpha \quad \Rightarrow \quad m_1 g\sin\alpha\cos\beta - m_2 g = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\beta = \arccos\left(\frac{m_2}{m_1\sin\alpha}\right)}$$

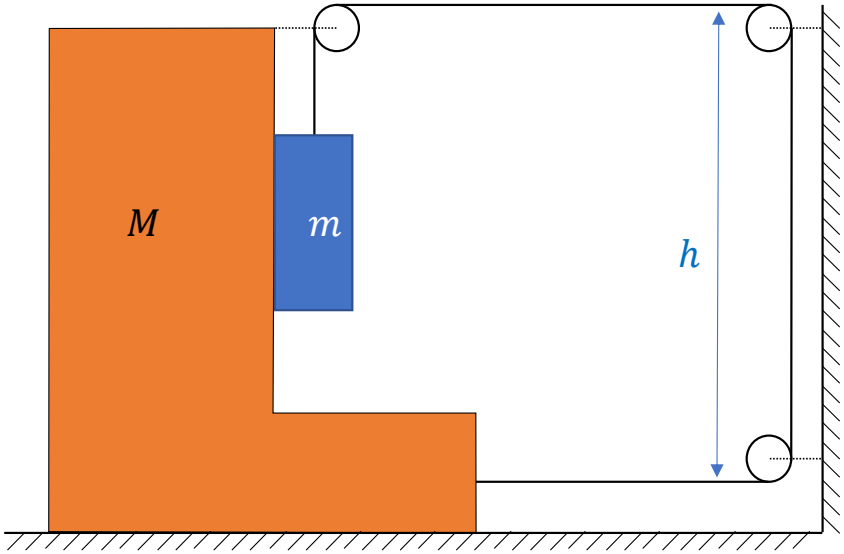
דינמיקה

- **<u>תרגיל 2</u>**

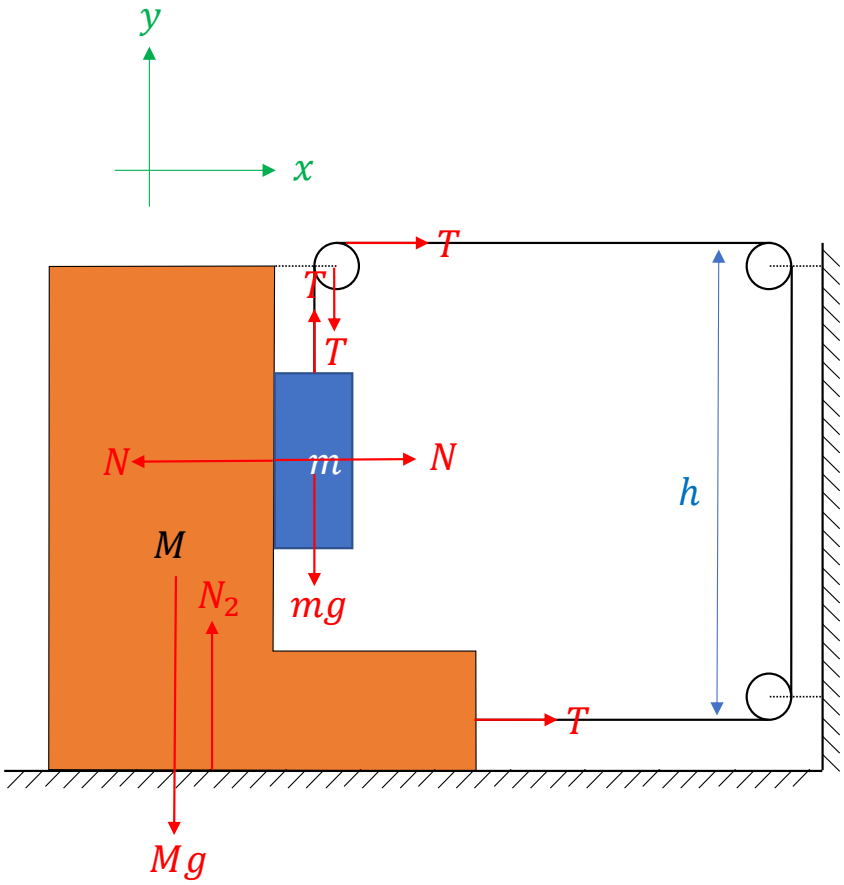
נתונה המערכת הבאה –

א. מהי תאוצת הגוף m?

ב. מהי התאוצת המקסימלית האפשרית כתלות ביחס בין המסות? מהי התאוצה המינימלית?



דינמיקה



- **<u>תרגיל 2 - פתרון</u>**

<u>א.</u> מהי תאוצת הגוף m?

משוואות הכוחות על הגוף m:

$$N = ma_x$$

$$T - mg = ma_y$$

משוואות הכוחות על הגוף M:

$$2T - N = MA_x$$

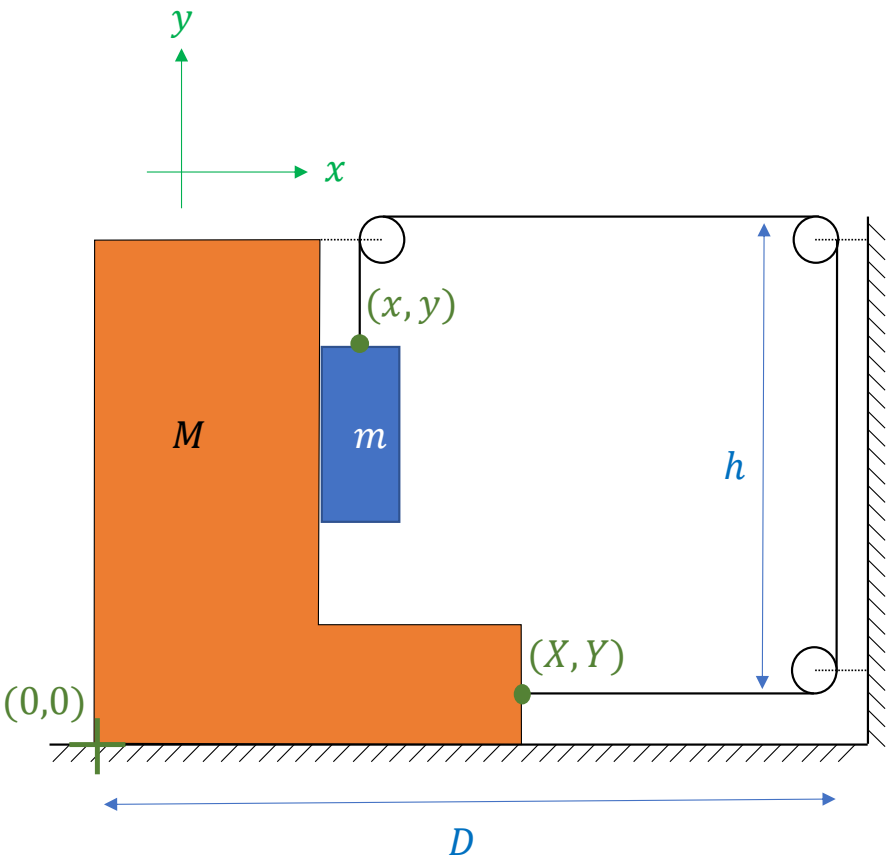
$$N_2 - Mg - T = MA_y = 0$$

יש לנו יותר נעלמים ממשוואות. נוסיף אילוצים:

ו) M דוחף את m בכיוון $\hat{x}$ ולכן

$$a_x = A_x$$

דינמיקה



- **<u>תרגיל 2 - פתרון</u>**

ii) שימור אורך החוט

נבחר את ראשית הצירים להיות בפינה השמאלית תחתונה של הגוף M, את קצה החוט שמחובר לגוף m נסמן ב- (x,y) ואת קצה החוט שמחובר לחלק התחתון של הגוף M נסמן ב-(X,Y).

נקרא למרחק בין החלק של החוט שמקבל לקיר הימני לבין ראשית הצירים D, ולאורך החוט הכולל l.

נכתוב במפורש את אורך החוט לפי סכום האורכים של החלקים השונים שמרכיבים אותו

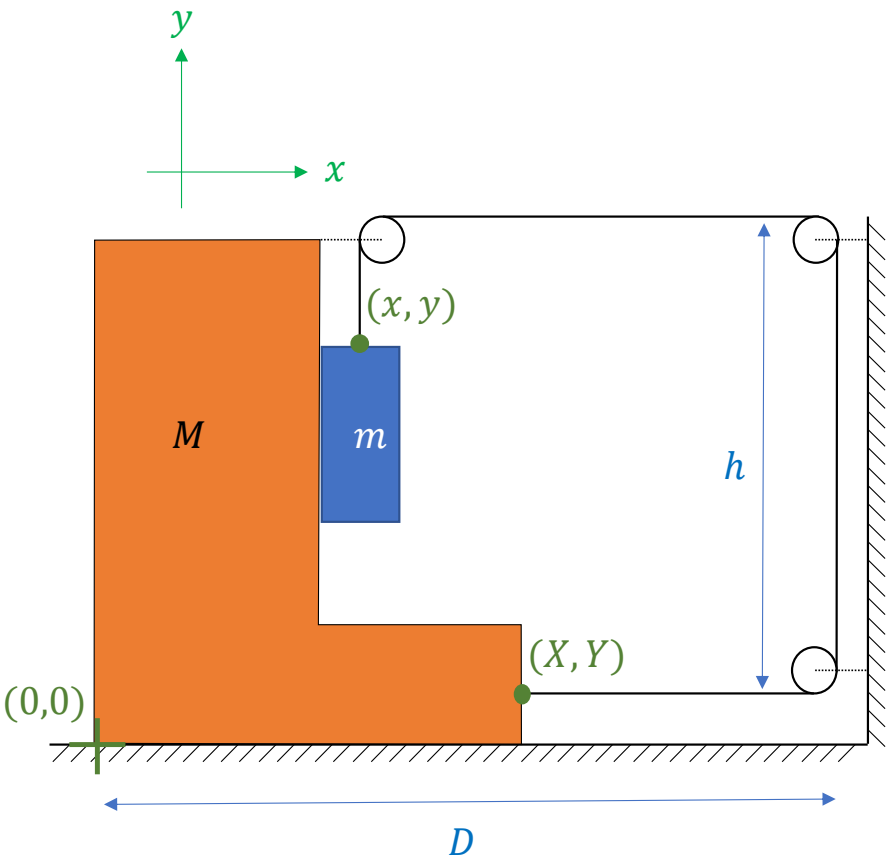
$$l = (D - X) + h + (D - x) + (h - y)$$

ונשים לב שלמרות שהקואורדינטות של הגוף M והגוף m משתנות עם התנועה, אורך החוט (צד שמאל של המשוואה) נשאר קבוע.
ננצל את העובדה הזאת ונגזור פעמיים לפי הזמן

$$0 = -\ddot{X} - \ddot{x} - \ddot{y} = -A_x - a_x - a_y$$

$$a_y = -2a_x$$

דינמיקה



- **<u>תרגיל 2 - פתרון</u>**

עכשיו יש לנו מספיק משוואות כדי למצוא את a_x,a_y

$$(1) \qquad N = ma_x$$

$$(2) \qquad T - mg = ma_y$$

$$(3) \qquad 2T - N = MA_x$$

$$(1) + (3) \qquad 2T = (M + m)a_x$$

$$(2) \qquad T = m(-2a_x + g)$$

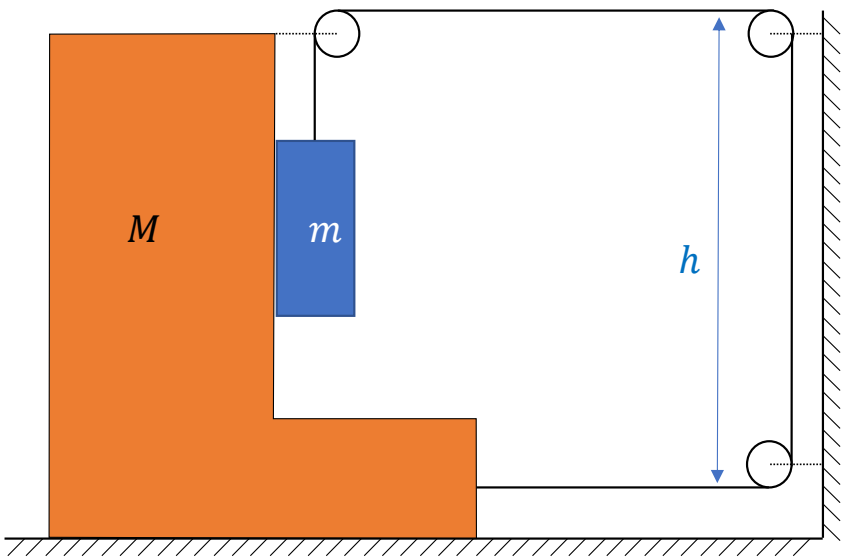
$$\Rightarrow \quad 2m(-2a_x + g) = (M + m)a_x$$

$$2mg = (M + 5m)a_x$$

$$\boxed{a_x = \frac{2mg}{(M + 5m)} \qquad a_y = \frac{-4mg}{(M + 5m)}}$$

דינמיקה

- **<u>תרגיל 2 - פתרון</u>**



ב. מהי התאוצה המקסימלית והמינימלית כתלות ביחס בין המסות?

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \frac{mg}{5m + M}\sqrt{2^2 + (-4)^2}$$

$$= \frac{mg}{m\left(5 + \frac{M}{m}\right)}\sqrt{20} = \frac{2\sqrt{5}g}{\left(5 + \frac{M}{m}\right)}$$

נבדוק את מקרי הקצה של היחס M/m -

כאשר $\frac{M}{m} \to 0$, כלומר $m \gg M$, נקבל את התאוצה המקסימלית

$$|\vec{a}| = \frac{2}{\sqrt{5}}g$$

כאשר $\frac{M}{m} \to \infty$, כלומר $M \gg m$, נקבל את התאוצה המינימלית

$$|\vec{a}| = 0$$

הגוף m קל מאוד לעומת M וכמעט ולא גורם לו לתזוזה (נזכר שאין חיכוך, אז תמיד תהיה תנועה)

תדירות, תדירות זוויתית וזמן מחזור

- נזכר בתוצאות מהתרגול שעבר

$$\omega = \dot{\theta} \quad \Rightarrow \quad \theta(t) = \omega t + \theta_0$$

$$[\omega] = \frac{radians}{second} = [2\pi][f]$$

$$fT = 1 \quad \Rightarrow \quad T = 1/f = \frac{2\pi}{\omega}$$

תדירות, תדירות זוויתית וזמן מחזור

שאלה 3

נמלה נעה במהירות קבועה u לאורך מוט המסתובב בתדירות זוויתית קבועה ω_0 (במקביל לרצפה). מקדם החיכוך הסטטי בין הנמלה למוט הוא μ_s. נתון כי מתקיימים תנאי ההתחלה הבאים – $r_0 = 0$, $\theta_0 = 0$.

עד איזה רדיוס תגיע הנמלה בתנועה זו לפני שתיפול מהמוט?

שאלה 3 - פתרון

נתחיל בלמצוא את התאוצות שפועלות על הנמלה. נשים לב -

$$\theta = \omega_0 t \qquad r = ut$$

נשתמש בביטויים שקבלנו עבור תאוצה בקואורדינטות פולריות

$$\vec{a} = \left(\cancel{\ddot{r}} - r\dot{\theta}^2\right)\hat{r} + \left(\cancel{r\ddot{\theta}} + 2\dot{r}\dot{\theta}\right)\hat{\theta} = -u\omega_0^2 t\hat{r} + 2u\omega_0\hat{\theta}$$

ומשוואות ניוטון הפולריות יהיו

$$F_r = ma_r = -mu\omega_0^2 t \qquad F_\theta = ma_\theta = 2mu\omega_0$$

תדירות, תדירות זוויתית וזמן מחזור

שאלה 3 - פתרון

עד עכשיו הסקנו את התאוצה מהמסלול ואת הכוחות מהתאוצה. נראה מה צריך להיות גודל הכח הכולל (על מישור התנועה)

$$|F| = \sqrt{F_r^2 + F_\theta^2} = m\sqrt{u^2t^2\omega_0^4 + 4u^2\omega_0^2} = mu\omega_0\sqrt{\omega_0^2t^2 + 4}$$

ממשוואת הכוחות של הציר שמקביל לכח הכבידה נקבל

$$N = mg$$

והכח שגורם לתנועה של הנמלה הוא החיכוך הסטטי (שכיוונו נגד כיוון התנועה – לאן דוחפים את הרצפה כשהולכים?)

$$f_s \leq \mu_s N = \mu_s mg$$

ולכן בשיאה של התנועה החיכוך הסטטי יהיה בערכו המקסימלי ונקבל

$$\mu_s mg = mu\omega_0\sqrt{\omega_0^2t^2 + 4} \quad \Rightarrow \quad t^* = \sqrt{\frac{\mu_s^2 g^2}{u^2\omega_0^4} - \frac{4}{\omega_0^2}}$$

תדירות, תדירות זוויתית וזמן מחזור

שאלה 3 - פתרון

ולבסוף המרחק שבו הנמלה תפול יהיה

$$R = ut^* = u\sqrt{\frac{\mu_s^2 g^2}{u^2\omega_0^4} - \frac{4}{\omega_0^2}}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{R = \sqrt{\left(\frac{\mu_s g}{\omega_0^2}\right)^2 - \left(\frac{2u}{\omega_0}\right)^2}}$$

תדירות, תדירות זוויתית וזמן מחזור

שאלה 4

נתונה קרוסלה אופקית בעלת רדיוס R המסתובבת בתדירות זוויתית ω נגד כיוון השעון. צופה A עומד במרכז הקרוסלה במנוחה (ללא מסתובב). צופה B עומד במרכז הקרוסלה ומסתובב עמה. צופה C עומד בקצה הקרוסלה ומסתובב עמה.

חרק נמצא מחוץ לקרוסלה במנוחה, וברגע שצופה C חולף לידו הוא עולה על הקרוסלה ומתחיל לנוע לכיוון מרכזה במהירות קבועה u_0 **ביחס לקרוסלה.**

מצאו את מיקום, מהירות ותאוצת החרק (בכל סעיף יש להתייחס לצופה כאל ראשית הצירים של עצמו).

א. ביחס לצופה C בקואורדינטות פולריות(r,θ) שמכוונות לעבר החרק.

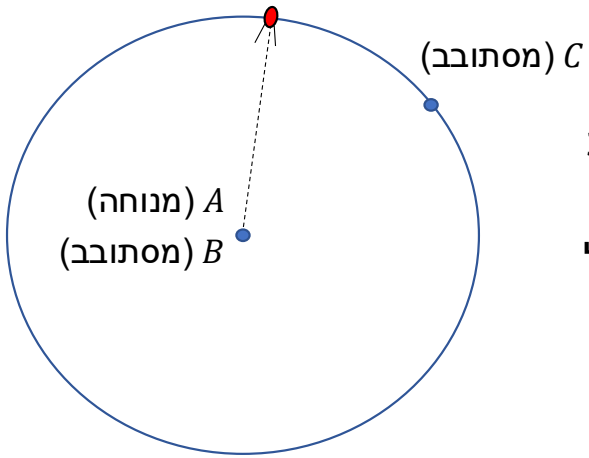
ב. ביחס לצופה B בקואורדינטות פולריות(r,θ) שמכוונות לעבר החרק.

ג. ביחס לצופה B בקואורדינטות קרטזיות (x,y) שאינן נעות ביחס לצופה B. יש להניח שהחרק עלה על הקרוסלה כך שהוא בזווית θ ביחס למערכת הקרטזית של B.

ד. ביחס לצופה A בקואורדינטות פולריות(r,θ) שמכוונות לעבר החרק.

ה. ביחס לצופה A בקואורדינטות קרטזיות (x,y) קבועות. כיצד נראה המסלול?

תדירות, תדירות זוויתית וזמן מחזור



שאלה 4 - פתרון

נקפיד לעבוד במערכת הצירים שראשיתה עם הצופה, ולהשוות בין מערכות צירים רק בקואורדינטות קרטזיות (למה?)

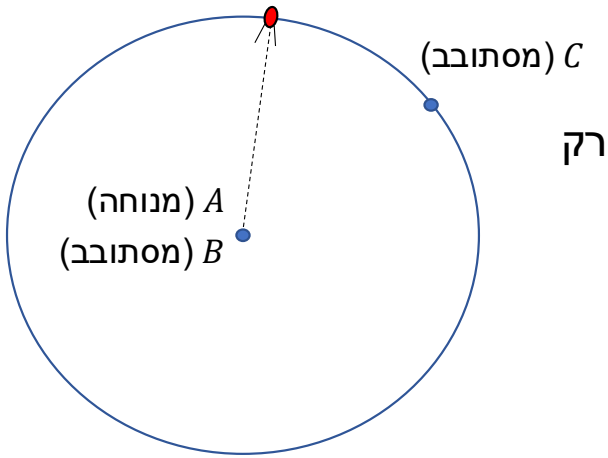
א. נתאר את התנועה מרגע שהחרק עולה על הקרוסלה. מנקודת המבט של צופה C, החרק נע לכיוון מרכז הקרוסלה במהירות קבועה u_0 ובכיוון $\hat{r}$ החיובי, ואין תנועה בכיוון המשיקי.

$$\vec{r} = u_0 t\hat{r} \qquad \vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{r}\hat{r} + r\cancel{\omega}\hat{\theta} = u_0\hat{r} \qquad \vec{a} = 0$$

ב. גם צופה B מסתובב עם הקרוסלה (לכן אין רכיב של תנועה משיקית), רק בהסטה של R בכיוון הרדיאלי מצופה C.

$$\vec{r} = (R - u_0 t)\hat{r} \qquad \vec{v} = -u_0\hat{r} \qquad \vec{a} = 0$$

תדירות, תדירות זוויתית וזמן מחזור



שאלה 4 - פתרון

ג. אנחנו עדיין במערכת מסתובבת שהחרק נע בה בקו ישר לכיוון המרכז, רק שיש זווית θ בין הכיוון הרדיאלי של התנועה לבין ציר x.

נכתוב מחדש את הפתרון של סעיף ב' בקואורדינטות קרטזיות עם הזווית הנתונה

$$\vec{r} = (R - u_0 t)\hat{r} \ = (R - u_0 t)(\cos\theta\hat{x} + \sin\theta\,\hat{y})$$

$$\vec{v} = -u_0\hat{r} \ = -u_0(\cos\theta\hat{x} + \sin\theta\,\hat{y}) \qquad \vec{a} = 0$$

ד. הפעם החרק מסתובב ביחס לצופה. נשים לב-

$$r = (R - u_0 t) \qquad \theta = \omega t$$

$$\dot{r} = -u_0 \qquad \dot{\theta} = \omega$$

$$\ddot{r} = 0 \qquad \ddot{\theta} = 0$$

$$\Rightarrow$$

$$\vec{r} = (R - u_0 t)\hat{r}$$

$$\vec{v} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta} \ = -u_0\hat{r} + (R - u_0 t)\omega\hat{\theta}$$

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{r} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\hat{\theta} \ = -(R - u_0 t)\omega^2\hat{r} - 2u_0\omega\hat{\theta}$$

תדירות, תדירות זוויתית וזמן מחזור

שאלה 4 - פתרון

ה. נמיר את התוצאות מסעיף ד' לקואורדינטות קרטזיות

$$\vec{r} = (R - u_0 t)\hat{r} = (R - u_0 t)(\cos\omega t\,\hat{x} + \sin\omega t\,\hat{y})$$

$$\vec{v} = -u_0\hat{r} + (R - u_0 t)\omega\hat{\theta} = -u_0(\cos\omega t\,\hat{x} + \sin\omega t\,\hat{y}) + (R - u_0 t)\omega(-\sin\omega t\,\hat{x} + \cos\omega t\,\hat{y})$$
$$= (-u_0\cos\omega t - (R - u_0 t)\omega\sin\omega t)\hat{x} + (-u_0\sin\omega t + (R - u_0 t)\omega\cos\omega t)\hat{y}$$

$$\vec{a} = -(R - u_0 t)\omega^2\hat{r} - 2u_0\omega\hat{\theta}$$
$$= (-(R - u_0 t)\omega^2\cos\omega t + 2u_0\omega\sin\omega t)\hat{x} + (-(R - u_0 t)\omega^2\sin\omega t - 2u_0\omega\cos\omega t)\hat{y}$$

נסתכל על $\vec{r}(t)$ לאורך t – הכיוון של הווקטור נע נגד כיוון השעון בתדירות זוויתית קבועה ω, וגודל הווקטור קטן לינארית ב-t.

בסה"כ נקבל ספירלה שמתחילה כשהמעגל חותך את ציר x ב-R ונגמרת במרכז המעגל, עם סיבוב נגד כיוון השעון.

תדירות, תדירות זוויתית וזמן מחזור

שאלה 4 - פתרון

הערה לגבי המסלול

ייתכן שהחרק יגיע למרכז הקרוסלה עוד לפני שהקרוסלה תשלים סיבוב מלא, במקרה הזה המסלול יראה יותר כמו קשת מאשר ספירלה.

נבדוק את התנאים לכך שזה יתקיים

$$t_{center} = \frac{R}{u_0}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$\Rightarrow$$

$$t_{center} < T$$

$$\frac{R}{u_0} < \frac{2\pi}{\omega}$$

$$\boxed{\frac{\omega R}{2\pi} < u_0}$$